ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SENGDAO SOULIYAVONG

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN b −METRIC VỚI ωt −KHOẢNG CÁCH

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Sengdao SOULIYAVONG

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 4 năm 2019

Tác giả

Sengdao SOULIYAVONG

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i

LỜI CẢM ƠN ii

MỤC LỤC iii

MỞ ĐẦU 1

Chương 1 KHÔNG GIAN b – METRIC 3

1.1. Không gian b – metric 3

1.2 Định lí Banach trong không gian b- metric…………..……..………………..5

Chương 2 ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN b – METRIC VỚI ωt – KHOẢNG CÁCH 8

2.1. ω – khoảng cách và ωt – khoảng cách trong không gian b – metric 8

2.2. Một số định lí điểm bất động trong không gian b – metric với ωt – khoảng cách 10

2.3. Các lớp m – hàm 21

2.4. Một số định lí điểm bất động đối với m – hàm trong không gian b – metric với ωt – khoảng cách 23

KẾT LUẬN 31

TÀI LIỆU THAM KHẢO 32

MỞ ĐẦU

Định lí điểm bất động Banach (hay nguyên lí co Banach) đã được Banach chứng minh vào năm 1922. Từ đó đã có nhiều người tổng quát hóa kết quả này theo nhiều hướng khác nhau. Năm 1989, Bakhtin [2] đã giới thiệu khái niệm không gian $b-$metric và chứng minh Định lí điểm bất động đối với ánh xạ co trong không gian $b-$metric, là tổng quát hóa của nguyên lí co Banach trong không gian metric. Năm 1996, Kada [6] đã giới thiệu $\omega-$khoảng cách và chứng minh Định lí điểm bất động Caristi. Năm 2014, Hussian [4] đã giới thiệu khái niệm $\omega t-$khoảng cách trong không gian $b-$ metric tổng quát, là tổng quát của $\omega-$khoảng cách và chứng minh định lí điểm bất động trong không gian $b-$ metric được sắp thứ tự bộ phận bằng cách sử dụng $\omega t-$khoảng cách. Năm 2015, Khojasteh [7] đã giới thiệu khái niệm hàm mô phỏng để tổng quát hóa nguyên lí co Banach.

Mục đích của luận văn là giới thiệu về không gian $b-$metric, một trong các mở rộng của không gian metric và trình bày một số kết quả về điểm bất động trên các không gian $b-$metric với $\omega t-$khoảng cách.

Với mục đích đó, chúng tôi chọn đề tài: "*Định lí điểm bất động trong không gian $b-$ metric với $\omega t-$khoảng cách*".

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [8] và [9], gồm 32 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Giới thiệu khái niệm và một vài tính chất của không gian $b-$ metric và một số định lí điểm bất động trên không gian $b-$metric.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày lại các kết quả nghiên cứu gần đây của S.K Mohanta về điểm bất động trong không gian $b-$

metric với $\omega t-$khoảng cách và kết quả của C. Mongkolkehaa, Y.J. Chob và P. Kumam về điểm bất động trong không gian $b-$metric đối với $m-$hàm với $\omega t-$khoảng cách.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
KHÔNG GIAN $b-$METRIC

1.1. Không gian $b-$metric

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là tập không rỗng và $k \geq 1$ là số thực. Hàm $\rho : E \times E \to [0,\infty)$ được gọi là $b-$metric trên E nếu

$i)$ $\rho(s,t) = 0 \Leftrightarrow s = t$

$ii)$ $\rho(s,t) = \rho(t,s)$ với mọi $s,t \in E$

$iii)$ $\rho(s,t) \leq k(\rho(s,r) + \rho(r,t))$ với mọi $s,t,r \in E$

Cặp (E,ρ) được gọi là không gian $b-$metric với hệ số k.

Ví dụ 1.1.2. Cho $E = \{-1,0,1\}$, $\rho : E \times E \to [0,\infty)$ xác định bởi

$\rho(s,t) = \rho(t,s)$ với $\forall s,t \in E$ $\rho(s,s) = 0,\ s \in E$ và $\rho(-1,0) = 3,$

$\rho(-1,1) = \rho(0,1) = 1$. Khi đó (E,ρ) là không gian $b-$ metric với $k = \dfrac{3}{2},$

nhưng không là không gian metric vì

$$\rho(-1,1) + \rho(1,0) = 1 + 1 = 2 < 3 = \rho(-1,0).$$

Ví dụ 1.1.3. Cho $E = \mathbb{R}$ và $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$\rho(s,t) = | s - t |^2 \text{ với } s,t \in E.$$

Khi đó (E,ρ) là không gian $b-$metric với $k = 2$ nhưng không là không gian metric.

Định nghĩa 1.1.4. Cho (E,ρ) là không gian $b-$ metric, $s \in E$ và $\{s_n\}$ là một dãy trong E. Khi đó

(i) $\{s_n\}$ hội tụ đến s $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(s_n,s) = 0$.

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ hoặc $s_n \to s$ khi $n \to \infty$.

(ii) $\{s_n\}$ là dãy Cauchy $\Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(s_n, s_m) = 0$.

(iii) (E,ρ) là đầy đủ $\Leftrightarrow$ mọi dãy Cauchy trong E đều hội tụ.

Định nghĩa 1.1.5. Cho (E,ρ) là không gian $b-$metric và ánh xạ $f: E \to E$. Ta nói rằng f liên tục tại $s_0 \in E$ nếu với mọi dãy $\{s_n\}$ trong E, $s_n \to s_0$ khi $n \to \infty$ thì $f(s_n) \to f(s_0)$ khi $n \to \infty$. Nếu f liên tục tại mỗi điểm $s_0 \in E$ thì ta nói f liên tục trên E.

Định lí 1.1.6 ([1]). *Cho (E,ρ) là không gian $b-$ metric, giả sử $\{s_n\}$ và $\{t_n\}$ hội tụ đến $s,t \in E$, tương ứng. Khi đó*

$$\frac{1}{k^2}\rho(s,t) \le \liminf_{n\to\infty} \rho(s_n, t_n) \le \limsup_{n\to\infty} \rho(s_n, t_n) \le k^2 \rho(s,t).$$

Đặc biệt, nếu $s = t$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(s_n, t_n) = 0$. Ngoài ra, với mỗi $r \in E$, ta có

$$\frac{1}{k}\rho(s,r) \le \liminf_{n\to\infty} \rho(s_n, r) \le \limsup_{n\to\infty} \rho(s_n, r) \le k\rho(s,r) .$$

Bổ đề 1.1.7. *Cho (E,ρ) là không gian $b-$metric với hệ số k và $\{s_n\} \subset E$ sao cho $s_n \to s$ và $s_n \to t$. Khi đó $s = t$.*

Bổ đề 1.1.8. *Cho (E,ρ) là không gian $b-$metric với hệ số k và $\{s_k\}_{k=0}^{n} \subset E$. Khi đó*:

$$\rho(s_n, s_0) \le k\rho(s_0, s_1) + \ldots + k^{n-1}\rho(s_{n-2}, s_{n-1}) + k^{n-1}\rho(s_{n-1}, s_n).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\rho(s_n, s_0) &\le k[\rho(s_0, s_1) + \rho(s_1, s_2)] = k\rho(s_0, s_1) + k\rho(s_1, s_n) \\
&\le k\rho(s_0, s_1) + k^2[\rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_n)] \\
&= k\rho(s_0, s_1) + k^2\rho(s_1, s_2) + k^2\rho(s_2, s_n) \\
&\ldots \\
&\le k\rho(s_0, s_1) + \ldots + k^{n-1}\rho(s_{n-2}, s_{n-1}) + k^{n-1}\rho(s_{n-1}, s_n).
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.1.9. *Cho* $\{t_n\}$ *là dãy trong không gian* $b-$*metric* (E,ρ) *với hệ số* k *sao cho*

$$\rho(t_n, t_{n+1}) \le \alpha\rho(t_{n-1}, t_n)$$

với $0 < \alpha < \dfrac{1}{k}$ *và mỗi* $n \in \mathbb{N}$. *Khi đó* $\{t_n\}$ *là dãy Cauchy trong* E.

1.2. Định lí Banach trong không gian b-metric

Định lí 1.2.1. *Cho* (E,ρ) *là không gian* $b-$*metric đầy đủ với hệ số* k, *và* $f : E \to E$ *là ánh xạ sao cho với* $0 < \alpha < \dfrac{1}{k}$,

$$\rho(fs, ft) \le \alpha\rho(s,t)$$

với mọi $s,t \in E$. *Khi đó* f *có điểm bất động duy nhất* r, *và với mỗi* $s_0 \in E$, *dãy* $\{f^n s_0\}$ *hội tụ đến* r.

Chứng minh. Lấy $s_0 \in E$ bất kì và kí hiệu $t_n = f^n s_0$. Khi đó

$$\rho(t_n, t_{n+1}) = \rho(ft_{n-1}, ft_n) \le \alpha\rho(t_{n-1}, t_n)$$

Với mỗi $n = 1,2....$ Bổ đề 1.1.9 kéo theo $\{t_n\}$ là dãy Cauchy, và vì (E,ρ) đầy đủ, nên $\exists r \in E$ sao cho $t_n \to r$ khi $n \to \infty$. Khi đó

$$\rho(fr, r) \le k(\rho(fr, ft_n) + \rho(t_{n+1}, r))$$

$$\le k(\alpha\rho(r, t_n) + \rho(t_{n+1}, r)) \to 0$$

khi $n \to \infty$. Do đó, $\rho(fr, r) = 0$ và $fr = r$.

Nếu $fr_1 = r_1$, thì ta có $\rho(r, r_1) = \rho(fr, fr_1) \le \alpha\rho(r, r_1) \Rightarrow r = r_1$. $\square$

Định lí 1.2.2. *Cho* (E,ρ) *là không gian* $b-$*metric đầy đủ với hệ số* k. *Cho* $f : E \to E$ *là ánh xạ sao cho với mỗi* $n \in \mathbb{N}$ *tồn tại* $\alpha_n \in (0,1)$ *sao cho* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *và* $\rho(f^n s, f^n t) \le \alpha_n \rho(s,t)$ *với mọi* $s,t \in E$. *Khi đó* f *có điểm bất động duy nhất* .

Chứng minh. Lấy α sao cho $0 < \alpha < \frac{1}{k}$. Vì $\alpha_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \alpha, \forall n \geq n_0$. Khi đó $\rho(f^n s, f^n t) \leq \alpha\rho(s,t)$, $\forall s,t \in E$ khi $n \geq n_0$. Nói cách khác, với $m \geq n_0$ tùy ý, $g = f^m$ thỏa mãn

$$\rho(gs, gt) \leq \alpha\rho(s,t),\ \forall s,t \in E.$$

Theo Định lí 1.2.2 $\exists! r : gr = r$. Khi đó $f^m r = r$, kéo theo $f^{m+1} r = f^m(fr) = fr$ và fr là điểm bất động của $g = f^m$. Vì điểm bất động của g là duy nhất, nên $fr = r$. □

Định lí 1.2.3. *Cho (E,ρ) là không gian b-metric đầy đủ với hằng số $k > 1$, và giả sử $f : E \to E$ thỏa mãn $\rho(f(s), f(t)) \leq \varphi(\rho(s,t))$, $\forall s,t \in E$, trong đó $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm tăng và thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ với mỗi $t > 0$. Khi đó $\exists! \bar{s} \in E : f(\bar{s}) = \bar{s}$ và $\lim_{n\to\infty} f^n(s) = \bar{s}, \forall s \in E.$*

Chứng minh. Trước tiên theo giả thiết về φ suy ra

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0,$$

do đó f liên tục. Bây giờ, cho $s \in E$ và $\varepsilon > 0$ tùy ý. Chọn $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Đặt $g = f^n$ và $s_m = g^m(s)$ với mỗi $m \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$\rho(s_{m+1}, s_m) = \rho(g^m(gs), g^m(s)) \leq \varphi^{nm}(\rho(g(s), s).$$

Do đó, $\lim_{m\to\infty} \rho(s_{m+1}, s_m) = 0$.

Bây giờ chọn $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho(s_{m+1}, s_m) < \frac{\varepsilon}{2k}$ và lấy $u \in B(s_m; \varepsilon)$. Khi đó

$$\rho(g(u), g(s_m)) \leq \varphi^n(\rho(u, s_m)) \leq \varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2k} \text{ và}$$